Métodos Numéricos – Raízes de Equações Não Lineares

Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal

www.muriloleal.com.br – 2025

Objetivo

Apresentar os principais métodos iterativos para encontrar raízes de funções não lineares: Bisseção, Secante e Newton-Raphson.

Método da Bisseção

Condição inicial: $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Teorema do Valor Intermediário).

Iteração:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Atualização:

Se $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$, então $b_{k+1} = x_k$, $a_{k+1} = a_k$;
Caso contrário, $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$.

Critério de parada:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |f(x_k)| < \varepsilon$$

Convergência: Linear. Sempre converge se f contínua em $[a, b]$.

Método da Secante

Iteração:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Entrada: Dois pontos iniciais x_0, x_1.

Critério de parada:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |f(x_{k+1})| < \varepsilon$$

Convergência: Superlinear (ordem ≈ 1.618). Não garante convergência.

Método de Newton-Raphson

Iteração:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Entrada: Um ponto inicial x_0 e derivada $f'(x)$.

Critério de parada:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |f(x_{k+1})| < \varepsilon$$

Convergência: Quadrática (se f' contínua e $f'(r) \neq 0$). Sensível à escolha de x_0.

Glossário

$f(x)$: função contínua cuja raiz deseja-se encontrar;
r: raiz exata, i.e., $f(r) = 0$;
x_k: aproximação da raiz na iteração k;
ε: tolerância (precisão desejada);
$f'(x)$: derivada de f;
Convergência linear: erro reduzido por fator constante;
Convergência quadrática: número de dígitos corretos dobra a cada iteração.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 2$ (raiz: $\sqrt{2} \approx 1.4142$)

Bisseção: $a_0 = 1$, $b_0 = 2$
$x_1 = 1.5$, $f(1.5) = 0.25 > 0 \to$ novo intervalo: $[1, 1.5]$
Após 5 iterações: $x_5 \approx 1.40625$

Secante: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

$$x_2 = 2 - (2)\frac{2-1}{2-(-1)} = 1.3333, \quad x_3 \approx 1.4286, \quad x_4 \approx 1.4133$$

Newton-Raphson: $x_0 = 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

$$x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.4167, \quad x_3 = 1.4142$$

Observações:

Bisseção: lento, mas robusto;
Secante: não requer derivada, mas pode divergir;
Newton: rápido, mas exige derivada e boa aproximação inicial.

Referências

Burden, R. L.; Faires, J. D. *Análise Numérica*. Cengage, 2016.

Ruggiero, M. A. G.; Lopes, V. L. R. *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson, 2008.